MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR, DE LA RECHERCHE, ET DE L'INNOVATION (MESRI)
UNIVERSITE IBA DER THIAM DE THIES (UIDT)
Ecole Nationale Supérieure d'Agriculture (ENSA)

CONCOURS D'ENTREE

MATHEMATIQUES

(Session Normale, Mai 2023 ; Durée : 2 heures)

------------~~~~~~~~~~~----------

EXERCICE 1 : (/ 4 points)

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$

Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.

Soit n un entier naturel tel que : $0 \leq n \leq 50$

On définit les évènements suivants :

A « le jardinier a choisi le lot 1 »

B « le jardinier a choisi le lot 2 »

J_n « le jardinier obtient n tulipes jaunes »

1. Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.

a) Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1 ?

b) Quelle est l'Esperance mathématique de cette loi ?

c) Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes

d) Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera l'arrondi au millième du résultat.

2.

a) Montrer que :$p_B(J_n) = C_n^{50} \times 2^{-50}$

b) En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes

c) On note p_n la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que J_n est réalisé

Etablir que $p_n = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n}+2^{50}}$

d) Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geq 0,9$?

Comment peut-on interpréter ce résultat ?

EXERCICE 2 : (/ 6 points)

Soit $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$.

1. Déterminer D_f.
2. Montrer que l'étude de f peut être réduite sur $[-\pi, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$.
3. Montrer que $\forall x \in D_f \quad f(x) = \frac{-\sin x - 1}{\cos x}$.
4. Étudier la limite de f en $\frac{\pi}{2}$ et interpréter les résultats.
5. Montrer que $f'(x) = \frac{1}{\sin x - 1}$.

En déduire le tableau de variations de f sur $[-\pi, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$.

PROBLEME : (/ 10 points)

I. Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = e^x(1 - x) - 1$
Etudier le sens de variation de g et en déduire le signe de $g(x)$.

II. Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} + 2 & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 3 \end{cases}$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal **(unité : 2 cm)**

On admettra que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$

1) Etudier f (sens de variation, limites de f en $+\infty$ et $-\infty$)

2) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$.
Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$.

3) Tracer la courbe $\mathcal{C}$, la droite $\mathcal{D}$, ainsi que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

4) Soit la fonction h définie sur IR par : $h(x) = f(x) - x$

a) Montrer que pour tout réel x, $h'(x) < 0$

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left]2; \frac{5}{2}\right[$

III.

1) Démontrer que si $x \in \left[2; \frac{5}{2}\right]$, on a : $g(x) \geq -20 \quad et \quad (e^x - 1)^2 \geq 40$.
En déduire que si $x \in \left[2; \frac{5}{2}\right]$, alors : $-\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$

2) Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Démontrer que, $U_n \in \left[2; \frac{5}{2}\right]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

c) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$,
puis que la suite (U_n) converge vers α.